Resolución de una red de agua mediante una técnica de Newton y una formulación en bloques del sistema

Queizan, Angel [a]
Occhiutto, Christian G. [b]
Juan Urruspuru [c]

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional La P.lata
Calle 60 y 124. La Plata. Buenos Aires
aqueizan@frlp.utn.edu.ar [a]
cgo4582@hotmail.com [b]
urrusjm@gmail.com [c]

Resumen:
El objetivo de este trabajo es desarrollar una metodología aplicada a la resolución de redes de agua, teniendo como incógnita los caudales, en el cual se aplica para su resolución la metodología de Newton, además se hace una formulación en bloque con el objetivo de mejorar la eficiencia computacional.

Palabras Clave
Resolución de red de agua. Sistema de ecuaciones no lineales. Descomposición en bloques.

1) Introducción al problema y el conjunto de ecuaciones que definen el modelo.

Anteriormente los modelos de redes de distribución de agua eran resueltos por la metodología de Hardy-Cross, luego con el advenimiento de computadoras con mayor capacidad de cálculo, se fueron implementado métodos matemáticos que se habían desarrollado para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, como por ejemplo, el método de Newton y los Quasi-Newton[1],[2],[4], estos últimos muy analizados hoy por los investigadores en sistemas no lineales y optimización.

En este trabajo vamos a aplicar la metodología de Newton, donde el sistema no lineal presenta la particularidad de estar formado por dos conjuntos de ecuaciones, unas lineales y otras no, aprovechando esa estructura definimos una formulación en bloques matriciales con el objetivo de mejorar el costo computacional. Esta metodología se implementara sobre una plataforma MatLab.

Consideremos un modelo que define una red de agua constituida por n nodos y k tramos, en este caso las ecuaciones que describen el comportamiento de la red son:

- ✓ $n-1$ ecuaciones de continuidad
- ✓ $k-n+1$ ecuaciones de circuitos elementales

Lo cual define un sistema no lineal de k incógnitas, que son los caudales asociados a los k tramos $qtr(i)$ $(i=1\dots k)$. Quedando definido el sistema no lineal de ecuaciones:

$$\underline{f} = \begin{Bmatrix} \underline{f^c} \\ \hline \underline{f^e} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1^c \\ f_2^c \\ f_3^c \\ \dots \\ f_{n-1}^c \\ \hline f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \\ \dots \\ f_{k-n+1}^e \end{Bmatrix} \tag{0.1}$$

Este sistema no lineal presenta las siguientes características:

- ✓ Las primeras $n-1$ ecuaciones f_j^c $(j=1\dots n-1)$ son lineales en los caudales asociados a los tramos $qtr(i)$ $(i=1\dots k)$

- ✓ Las segundas $k-n+1$ ecuaciones $f_j^e \; (j=1\ldots k-n-1)$ son no lineales en los caudales asociados a los tramos $qtr(i) \; (i=1\ldots k)$

1.1) Ecuaciones de continuidad.

Por razones de continuidad en cada nodo se tiene que satisfacer la siguiente ecuación

$$\sum_{k=1}^{m} qtr(k) + q(i) = 0 \quad i = 1,2,\ldots n-1 \qquad (0.2)$$

Donde:

- ✓ $m =$ Es la cantidad de tramos conectados al nodo i.
- ✓ $n =$ La cantidad total de nodos en la red.
- ✓ $i =$ El nodo donde aplicamos la ecuación de continuidad.
- ✓ $q(i) =$ El gasto asociado al nodo i
- ✓ $qtr(k)$ = El caudal asociado al k-esimo tramo el cual conecta los nodos j e i.

Tanto el gasto $q(i)$ como el gasto asociado al tramo $qtr(k)$ se toman positivos cuando salen (fuente o suministro) y negativo (sumidero o consumo) si entran al nodo i.

La ecuación de continuidad (0.2) se aplica en cualquier nodo de la red, pero unicamente en $n-1$ de todos los nodos que la forman.

1.2) Ecuación de perdida asociada al k-esimo tramo.

1.2.a) Ecuación de Darcy-Weisbach y de Colebrook-White.

Las perdidas en cada tramo, como consecuencia de la fricción entre la tubería y el fluido, están definidas por la ecuación de Darcy- Weisbach en conjunto con la ecuación de Colebrook-White.

La formula de Darcy-Weisbach establece que la perdida en el k-esimo tramo es:

$$\begin{aligned} h_f(k) &= fr(k)\cdot\frac{l(k)}{d(k)}\cdot\frac{v(k)^2}{2\cdot g} \\ &= fr(k)\cdot\frac{8\cdot l(k)}{g\cdot\pi^2\cdot d(k)^5}\cdot qtr(k)^2 \end{aligned} \qquad (0.3)$$

Por lo general expresamos las perdidas de la forma

$$h_f(k) = fr(k)\cdot\frac{8\cdot l(k)}{g\cdot\pi^2\cdot d(k)^5}\cdot\left|qtr(k)\right|\cdot qtr(k) \qquad (0.4)$$

para evitar el problema de tener números negativos elevados a una potencia par y perder el signo.

En las ecuaciones (0.3) y (0.4) sabemos que:

$h_f(k) =$ Perdida por fricción en el k-esimo tramo.

$fr(k) =$ Factor de fricción asociado al k-esimo tramo.

$g =$ Aceleración de la gravedad.

$d(k) =$ Diámetro del k-esimo tramo.

$l(k) =$ Longitud del tramo correspondiente al k-esimo tramo.

$v(k) =$ Velocidad media asociada al k-esimo tramo.

La formula de Colebrook-White que nos define el factor de fricción en el k-esimo tramo es:

$$\frac{1}{\sqrt{fr(k)}} = -2\cdot\log_{10}\left(\frac{k_s}{3,7\cdot d(k)} + \frac{2,51}{R_e(k)\cdot\sqrt{fr(k)}}\right) \qquad (0.5)$$

$$R_e(k) = \frac{v(k)\cdot d(k)}{\nu} \qquad (0.6)$$

Siendo:

$fr(k) =$ Factor de fricción en el k-esimo tramo.

$R_e(k) =$ Numero de Reynolds en el k-esimo tramo.

$k_S =$ Rugosidad absoluta = $0.015\cdot 10^{-3}$ [m] para PVC.

$d(k) =$ Diámetro del k-esimo tramo.

$v(k) =$ Velocidad media en el k-esimo tramo.

$\upsilon =$ Viscosidad cinemática del fluido = $1.14\cdot 10^{-6}$ [m2/seg] para el agua a 15 º C.

1.2.b) Determinación del factor de fricción por medio de la formula de Colebrook-White.

Dada la velocidad, el diámetro del tramo, la rugosidad absoluta k_S y la viscosidad cinemática del fluido ν; por medio de las siguientes fórmulas podemos determinar el factor de fricción

$$R_e(k) = \frac{v(k)\cdot d(k)}{\nu} \qquad \text{Numero de Reynolds}$$

$$G(fr(k)) = \frac{1}{\sqrt{fr(k)}} + 2\cdot\log_{10}\left(\frac{k_s}{3,7\cdot d(k)} + \frac{2,51}{R_e(k)\cdot\sqrt{fr(k)}}\right) = 0$$

Colebrook - White

La ecuación anterior no es explícita en el factor de fricción, esto nos conduce a tener que aplicar el método iterativo de Newton para su resolución, siendo la siguiente fórmula la expresión recursiva:

$$fr_{n+1} = fr_n + \frac{G(fr_n)}{G'(fr_n)} \qquad (0.7)$$

siendo $G(fr)$

$$G(fr) = \frac{1}{\sqrt{fr}} + 2\cdot\log_{10}\left(\frac{k_s}{3,7d} + \frac{2,51}{R_e\sqrt{fr}}\right) \qquad (0.8)$$

y su derivada

$$G'(fr) = -\frac{1}{2fr^{2/3}} - \frac{2,51}{R_e fr^{2/3}}\frac{\log_{10} e}{\left(\frac{k_s}{3,7d} + \frac{2,51}{R_e\sqrt{fr}}\right)} \qquad (0.9)$$

Para iniciar el proceso iterativo debemos calcular un valor inicial del factor fricción, que se obtiene de igualar la fórmula de Darcy-Weisbach con la de Hazen-Williams. La fórmula de Hazen-Williams que determina la perdida en un tramo es

$$h = \frac{13,6124\cdot g}{c_h^{1,85185}\cdot d^{1,166}\cdot v^{0,14815}}\cdot\frac{L\cdot v^2}{d\cdot 2\cdot g} \qquad (0.10)$$

y la fórmula de Darcy Weisbach es

$$h = fr\cdot\frac{L}{d}\cdot\frac{v^2}{2\cdot g} \qquad (0.11)$$

igualando ambas fórmulas, obtenemos un valor inicial para el factor de fricción

$$fr = \frac{13,6124\cdot g}{c_h^{1,85185}\cdot d^{1,166}\cdot v^{0,14815}} \qquad (0.12)$$

y siendo la velocidad media

$$v = \frac{4\cdot qtr}{\pi\cdot d^2} \qquad (0.13)$$

Reemplazando (0.13) en (0.12) tenemos el valor inicial del factor de fricción

$$fr = \frac{13,133856\cdot d^{0,1297}\cdot g}{c_h^{1,85185}\cdot qtr^{0,14815}} \qquad (0.14)$$

siendo:

d = Diámetro del tramo.

c_h = Coeficiente que depende del material de la tubería que al ser de PVC es igual a 150.

qtr = Gasto asociado al tramo.

g = Aceleración de la gravedad.

1.3) Ecuaciones de circuitos elementales.

Realizando el recorrido completo de un circuito elemental (partiendo y llegando al mismo nodo) definido por los tramos k, r, s, t y w, se satisface la siguiente ecuación

$$f^e\left(q(k),q(r),q(s),q(t),q(w)\right) = h_f(k)+h_f(r)+h_f(s)+h_f(t)+h_f(w) = 0 \qquad (0.15)$$

Siendo:

$$\begin{cases} h_f(j) = fr(j)\cdot\dfrac{8\cdot l(j)}{g\cdot\pi^2\cdot d(j)^5}\cdot\left|qtr(j)\right|\cdot qtr(j) \\ \dfrac{1}{\sqrt{fr(j)}} + 2\cdot\log_{10}\left(\dfrac{k_s}{3,7\cdot d(j)} + \dfrac{2,51}{R_e(j)\cdot\sqrt{fr(j)}}\right) = 0 \\ R_e(j) = \dfrac{4\cdot qtr(j)}{\nu\cdot\pi\cdot d(j)} \end{cases}$$

$$j = k,r,s,t,w \qquad (0.16)$$

Donde:

$l(j)$ = Longitud del j-esimo tramo.

$d(j)$ = Diámetro del j-esimo tramo.

$fr(j)$ = Factor de fricción en el j-esimo tramo.

$qtr(j)$ = Caudal asociado el j-esimo tramo.

Elementos del Trabajo y metodología

1) Metodología de resolución del sistema no lineal

Para la resolución del sistema no lineal aplicamos la metodología iterativa de Newton-Raphson[1],[2],[4], el cual consiste en linealizar cada una de las ecuaciones aplicando un desarrollo de Taylor en el entorno de un punto $\underline{q}^{(i)}$, despreciando los términos superiores a las derivadas primeras, tenemos:

$$\underline{f\left(\underline{q}^{(i+1)}\right)} = \\ = \underline{f\left(\underline{q}^{(i)}\right)} + \underline{\underline{J\left(\underline{q}^{(i)}\right)}}\left(\underline{q}^{(i+1)} - \underline{q}^{(i)}\right) + \cancel{\cdots} \qquad (0.17)$$

Donde la matriz $\underline{\underline{J\left(\underline{q}^{(i)}\right)}}$ es matriz Jacobiana de $\underline{f}$ evaluada en $\underline{q}^{(i)}$

$$\underline{\underline{J\left(\underline{q}^{(i)}\right)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^c}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_k} \\ \frac{\partial f_2^c}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_k} \\ \frac{\partial f_1^e}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_k} \end{bmatrix}^{(i)}}_{\underline{\underline{A}}} \qquad (0.18)$$

Igualando a cero las ecuaciones (0.17), nos queda el sistema lineal de ecuaciones de $k \times k$

$$\underline{f\left(\underline{q}^{(i)}\right)} + \underline{\underline{J\left(\underline{q}^{(i)}\right)}}\left(\underline{q}^{(i+1)} - \underline{q}^{(i)}\right) = \underline{0} \qquad (0.19)$$

Quedando expresado un sistema lineal de $k \times k$ ecuaciones; donde las k incógnitas son incrementos de los caudales asociados a los tramos, permitiendo actualizar los caudales de la iteración anterior.

$$\underline{\Delta q}^{(i)} = \left(\underline{q}^{(i+1)} - \underline{q}^{(i)}\right) \quad \rightarrow \quad \underline{q}^{(i+1)} = \underline{q}^{(i+1)} + \underline{\Delta q}^{(i)} \qquad (0.20)$$

Quedando el sistema lineal expresado de la forma:

$$\underline{\underline{A}}^{(i)}\, \underline{x}^{(i)} = \underline{b}^{(i)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^c}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_k} \\ \frac{\partial f_2^c}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_k} \\ \frac{\partial f_1^e}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_k} \end{bmatrix}^{(i)}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{Bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_{n-1} \\ \Delta q_n \\ \vdots \\ \Delta q_k \end{Bmatrix}^{(i)} = -\begin{Bmatrix} f_1^c \\ f_2^c \\ f_3^c \\ \cdots \\ f_{n-1}^c \\ \hline f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \\ \cdots \\ f_{k-n+1}^e \end{Bmatrix}^{(i)} \qquad (0.21)$$

En el cual podemos observar que la matriz de los coeficientes $\underline{\underline{A}}^{(i)}$ varía en cada iteración i, como también el vector de los términos independientes $\underline{b}^{(i)}$.

Las derivadas parciales de las ecuaciones de continuidad f_j^c $(j = 1 \ldots n-1)$ respecto a los caudales $qtr(i)$ $(i = 1 \ldots k)$ pueden tomar los valores

$$\frac{\partial f_j^c}{\partial qtr(i)} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \tag{0.22}$$

La ecuación de un circuito de elemental formada por los tramos k, r, s, t y w es

$$f^e\left(q(k), q(r), q(s), q(t), q(w)\right) = h_f(k) + h_f(r) + h_f(s) + h_f(t) + h_f(w) \tag{0.23}$$

Siendo:

$$\begin{cases} h_f(j) = fr(j) \cdot \dfrac{8 \cdot l(j)}{g \cdot \pi^2 \cdot d(j)^5} \cdot |qtr(j)| \cdot qtr(j) \\ \dfrac{1}{\sqrt{fr(j)}} + 2 \cdot \log_{10}\left(\dfrac{K_s}{3{,}7 \cdot d(j)} + \dfrac{2{,}51}{R_e(j) \cdot \sqrt{fr(j)}}\right) = 0 \qquad j = k, r, s, t, w \\ R_e(j) = \dfrac{4 \cdot qtr(j)}{\nu \cdot \pi \cdot d(j)} \end{cases}$$

Y su derivada parcial respecto al caudal $qtr(s)$ esta expresada por:

$$\frac{\partial h_f}{\partial qtr(s)} = \underbrace{\frac{\partial h_f}{\partial qtr(s)}}_{A} + \underbrace{\frac{\partial h_f}{\partial f(s)}}_{B} \cdot \underbrace{\frac{\partial f(s)}{\partial R_e(s)}}_{C} \cdot \underbrace{\frac{dR_e(s)}{dqtr(s)}}_{D} \tag{0.24}$$

Donde A esta dado por :

$$\frac{\partial h_f(s)}{\partial q(s)} = fr(s) \cdot \frac{16 \cdot l(s)}{g \cdot \pi^2 \cdot d(s)^5} \cdot q(s) \tag{0.25}$$

B esta dado por

$$\frac{\partial h_f}{\partial f(s)} = \frac{8 \cdot l(s)}{g \cdot \pi^2 \cdot d(s)^5} \cdot |q(s)| \cdot q(s) \tag{0.26}$$

Para el cálculo de C, tenemos

$$m\left(R_e, fr(R_e)\right) = \frac{1}{\sqrt{fr(s)}} + 2 \cdot \log_{10}\left(\frac{K_s}{3{,}7 \cdot d(s)} + \frac{2{,}51}{R_e(s) \cdot \sqrt{fr(s)}}\right) = 0 \tag{0.27}$$

de donde podemos decir que

$$\frac{\partial m}{\partial R_e(s)} + \frac{\partial m}{\partial fr(s)} \frac{\partial fr(s)}{\partial R_e(s)} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial fr(s)}{\partial R_e(s)} = -\frac{\dfrac{\partial m}{\partial R_e(s)}}{\dfrac{\partial m}{\partial fr(s)}} \tag{0.28}$$

Donde

$$\frac{\partial m}{\partial R_e(s)} = -\frac{5.02}{\left[\dfrac{K_s \cdot R_e(s)^2 \cdot \sqrt{fr(s)}}{3.7 \cdot d(s)} + 2{,}51 \cdot R_e(s)\right]} \cdot \log_{10} e$$

$$\frac{\partial m}{\partial f(s)} = -\frac{1}{2\cdot fr(s)^{3/2}} - \frac{2,51}{R_e(s)\cdot fr(s)^{3/2}} \frac{1}{\left[\frac{K_s}{3.7\cdot d(s)} + \frac{2,51}{R_e(s)\sqrt{fr(s)}}\right]}\cdot \log_{10} e$$

Reemplazando, tenemos que C queda expresado por:

$$\frac{\partial fr(s)}{\partial R_e(s)} = -\frac{\dfrac{5.02}{\left[\dfrac{K_s\cdot R_e(s)^2\cdot\sqrt{fr(s)}}{3.7\cdot d(s)} + 2,51\cdot R_e(s)\right]}\cdot\log_{10} e}{\dfrac{1}{2\cdot fr(s)^{3/2}} + \dfrac{2,51}{R_e(s)\cdot fr(s)^{3/2}}\dfrac{1}{\left[\dfrac{K_s}{3.7\cdot d(s)} + \dfrac{2,51}{R_e(s)\sqrt{fr(s)}}\right]}\cdot\log_{10} e} \tag{0.29}$$

Para el calculo de D sabemos que

$$R_e(s) = \frac{4\cdot q(s)}{\nu\cdot\pi\cdot d(s)} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial R_e(s)}{\partial q(s)} = \frac{4}{\nu\cdot\pi\cdot d(s)} \tag{0.30}$$

Reemplazando (0.25), (0.26), (0.27), (0.29) y (0.30) nos queda

$$\frac{\partial h_f}{\partial q(s)} = fr(s)\cdot\frac{16\cdot l(s)}{g\cdot\pi^2\cdot d(s)^5}\cdot q(s) + \left\{\frac{8\cdot l(s)}{g\cdot\pi^2\cdot d(s)^5}\cdot|q(s)|\cdot q(s)\right\}\cdot\ldots$$

$$\left\{-\frac{\dfrac{5.02}{\left[\dfrac{K_s\cdot R_e(s)^2\cdot\sqrt{fr(s)}}{3.7\cdot d(s)} + 2,51\cdot R_e(s)\right]}\cdot\log_{10} e}{\dfrac{1}{2\cdot fr(s)^{3/2}} + \dfrac{2,51}{R_e(s)\cdot fr(s)^{3/2}}\dfrac{1}{\left[\dfrac{K_s}{3.7\cdot d(s)} + \dfrac{2,51}{R_e(s)\cdot\sqrt{fr(s)}}\right]}\cdot\log_{10} e}\right\}\cdot\frac{4}{\nu\cdot\pi\cdot d(s)} \tag{0.31}$$

Analizando la matriz $\underline{\underline{A}}$ podemos ver que ciertos bloques permanecen constantes iteración a iteración, mientras que otros varían. Esto hace que sea ventajoso aplicar una factorización del tipo LU en bloques.

2) Descomposición en bloques del sistema linealizado y su resolución.

En tal caso el sistema linealizado expresado en bloques[6], esta dado por:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}
\frac{\partial f_1^c}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_k} \\
\frac{\partial f_2^c}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_k} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_k} \\
\hline
\frac{\partial f_1^e}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_k} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_k}
\end{array}\right]^{(i)}
\left\{\begin{array}{c}\Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_{n-1} \\ \hline \Delta q_n \\ \vdots \\ \Delta q_k\end{array}\right\}^{(i)}
= -\left\{\begin{array}{c} f_1^c \\ f_2^c \\ \cdots \\ f_{n-1}^c \\ \hline f_1^e \\ \cdots \\ f_{k-n+1}^e\end{array}\right\}^{(i)}$$

En forma mas condensada tenemos

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\underline{\underline{A_{11}}}}_{[n-1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{A_{12}}}}_{[n-1]\times[k-n+1]} \\ \hline \underbrace{\underline{\underline{A_{21}}}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{A_{22}}}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \underbrace{\underline{\Delta q_a}}_{[n-1]\times 1} \\ \hline \underbrace{\underline{\Delta q_b}}_{[k-n+1]\times 1} \end{array}\right\}^{(i)} = -\left\{\begin{array}{c} \underbrace{\underline{f^c}}_{[n-1]\times 1} \\ \hline \underbrace{\underline{f^e}}_{[k-n+1]\times 1} \end{array}\right\}^{(i)} \tag{0.32}$$

Siendo :

Bloque $\underline{\underline{A_{11}}}$

$$\underbrace{\underline{\underline{A_{11}}}}_{[n-1]\times[n-1]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^c}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_{n-1}} \\ \frac{\partial f_2^c}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_{n-1}} \end{bmatrix} \tag{0.33}$$

Una matriz sparce cuadrada de $[n-1]\times[n-1]$, cuyos elementos permanecen invariantes durante el proceso iterativo y pueden tomar uno de los siguientes valores -1, 1 o 0.

Bloque $\underline{\underline{A_{12}}}$

$$\underbrace{\underline{\underline{A_{12}}}}_{[n-1]\times[k-n+1]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^c}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_1^c}{\partial q_k} \\ \frac{\partial f_2^c}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_2^c}{\partial q_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}^c}{\partial q_k} \end{bmatrix} \tag{0.34}$$

Es una matriz rectangular de $[n-1]$ filas y $[k-n+1]$ columnas; cuyos elementos presentan la misma característica que los de $\underline{\underline{A_{11}}}$.

Bloque $\underline{\underline{A_{21}}}^{(i)}$

$$\underbrace{\underline{\underline{A_{21}}}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[n-1]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^e}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^e}{\partial q_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_{n-1}} \end{bmatrix}^{(i)} \tag{0.35}$$

Es una matriz rectangular de filas y $[n-1]$ columnas; cuyos $[k-n+1]$ elementos varían durante el proceso iterativo.

Bloque $\underline{\underline{A_{22}}}^{(i)}$

$$\underbrace{\underline{\underline{A_{22}}}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1^e}{\partial q_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_1^e}{\partial q_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_{k-n+1}^e}{\partial q_k} \end{bmatrix}^{(i)} \qquad (0.36)$$

Es una matriz rectangular de $[k-n+1]\times[k-n+1]$; cuyos elementos varían durante el proceso iterativo.
Los vectores columna $\underline{\Delta q_a}$ y $\underline{\Delta q_b}$, constituyen el vector de las incógnitas en cada iteración y son los incremento de los caudales que utilizamos para ir actualizando los caudales durante el proceso iterativo.

$$\underbrace{\underline{\Delta q_a}}_{[n-1]\times 1} = \begin{Bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_{n-1} \end{Bmatrix}^{(i)} \qquad \underbrace{\underline{\Delta q_b}}_{[k-n+1]\times 1} = \begin{Bmatrix} \Delta q_n \\ \vdots \\ \Delta q_k \end{Bmatrix}^{(i)} \qquad (0.37)$$

Los vectores $\underline{f^c}$ y $\underline{f^{e\,(i)}}$ definen el vector de los términos independientes en cada iteración.

$$\underbrace{\underline{f^c}}_{[n-1]\times 1} = \begin{Bmatrix} f_1^c \\ f_2^c \\ \cdots \\ f_{n-1}^c \end{Bmatrix}^{(i)} \qquad \underbrace{\underline{f^{e\,(i)}}}_{[k-n+1]\times 1} = \begin{Bmatrix} f_1^e \\ \cdots \\ f_{k-n+1}^e \end{Bmatrix}^{(i)} \qquad (0.38)$$

Planteando la descomposición en bloques de la forma LU y definiendo la siguiente estructura en bloques, tenemos que

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\underline{\underline{A_{11}}}}_{[n-1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{A_{12}}}}_{[n-1]\times[k-n+1]} \\ \hline \underbrace{\underline{\underline{A_{21}}}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{A_{22}}}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\underline{\underline{L_{11}}}}_{[n-1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{[n-1]\times[k-n+1]} \\ \hline \underbrace{\underline{\underline{L_{21}}}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{I}}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\underline{\underline{I}}}_{[n-1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{[n-1]\times[n-1]} \\ \hline \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{[k-n+1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{\tilde{A}}}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\underline{\underline{U_{11}}}}_{[n-1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{U_{12}}}}_{[n-1]\times[k-n+1]} \\ \hline \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{[k-n+1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{I}}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \end{array}\right] \qquad (0.39)$$

donde $\underline{\underline{\tilde{A}}} = \underline{\underline{A_{22}}}^{(i)} - \underline{\underline{L_{21}}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{U_{12}}}$ es la matriz complemento de Shur de $\underline{\underline{A_{11}}}$, factorizando la matriz $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ de la forma $\underline{\underline{\tilde{A}}}^{(i)} = \underline{\underline{L_{22}}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{U_{22}}}^{(i)}$, la expresión (0.39) toma la forma

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\underline{\underline{A}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{A}}_{12}}_{[n-1]\times[k-n+1]} \\ \hline \underbrace{\underline{\underline{A}}_{21}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{A}}_{22}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\underline{\underline{L}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{[n-1]\times[k-n+1]} \\ \hline \underbrace{\underline{\underline{L}}_{21}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{L}}_{22}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\underline{\underline{U}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{U}}_{12}}_{[n-1]\times[k-n+1]} \\ \hline \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{[k-n+1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{U}}_{22}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \end{array}\right] \qquad (0.40)$$

Realizando las multiplicaciones entre bloques e igualando, tenemos que

$$\underbrace{\underline{\underline{A}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} = \underbrace{\underline{\underline{L}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} \cdot \underbrace{\underline{\underline{U}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} \qquad (0.41)$$

$$\underbrace{\underline{\underline{A}}_{12}}_{[n-1]\times[k-n+1]} = \underbrace{\underline{\underline{L}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} \cdot \underbrace{\underline{\underline{U}}_{12}}_{[n-1]\times[k-n+1]} \qquad (0.42)$$

$$\underbrace{\underline{\underline{A}}_{21}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[n-1]} = \underbrace{\underline{\underline{L}}_{21}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[n-1]} \cdot \underbrace{\underline{\underline{U}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} \qquad (0.43)$$

$$\underbrace{\underline{\underline{A}}_{22}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} = \underbrace{\underline{\underline{L}}_{21}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[n-1]} \cdot \underbrace{\underline{\underline{U}}_{12}}_{[n-1]\times[k-n+1]} + \underbrace{\underline{\underline{L}}_{22}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \cdot \underbrace{\underline{\underline{U}}_{22}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \qquad (0.44)$$

De la expresión (0.41) vemos que tenemos que realizar una factorización del tipo LU a la matriz $\underline{\underline{A}}_{11}$, la cual es invariante en el proceso iterativo. Para poder asegurar que esto sea posible tenemos que garantizar que los menores de la diagonal principal sean distintos de cero, es decir

$$a_{11} = l_{11} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = l_{11} \cdot l_{22} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = l_{11} \cdot l_{22} \cdot l_{33} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} = l_{11} \cdot l_{22} \cdot l_{33} \cdots l_{(n-1)(n-1)} \neq 0$$

En caso de no cumplirse algunas de las desigualdades, se realiza una permutación de columnas de manera de poder garantizar la factorización. La permutación se hace por filas, y no por columnas, ya que de esta manera no cambiamos el orden de las incógnitas.

La expresión (0.42) define $k-n+1$ sistemas triangulares inferiores independientes entre si de $n-1$ incógnitas cada uno, estos sistemas permaneces invariantes durante el proceso iterativo y cada uno de ellos define una columna de la matriz $\underline{\underline{U}}_{12}$. Como vemos en el siguiente esquema

Primer sistema	$\underbrace{\underline{\underline{L}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} \cdot \underbrace{\left\{\underline{\underline{U}}_{12}\right\}_{(:,1)}}_{[n-1]\times[1]} = \underbrace{\left\{\underline{\underline{A}}_{12}\right\}_{(:,1)}}_{[n-1]\times[1]}$	Obtenemos la primer columna de $\underline{\underline{U}}_{12}$
Segundo sistema	$\underbrace{\underline{\underline{L}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} \cdot \underbrace{\left\{\underline{\underline{U}}_{12}\right\}_{(:,2)}}_{[n-1]\times[1]} = \underbrace{\left\{\underline{\underline{A}}_{12}\right\}_{(:,2)}}_{[n-1]\times[1]}$	Obtenemos la segunda columna de $\underline{\underline{U}}_{12}$
………………..	………………….	………………….
k-n+1 sistema	$\underbrace{\underline{\underline{L}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} \cdot \underbrace{\left\{\underline{\underline{U}}_{12}\right\}_{(:,k-n+1)}}_{[n-1]\times[1]} = \underbrace{\left\{\underline{\underline{A}}_{12}\right\}_{(:,k-n+1)}}_{[n-1]\times[1]}$	Obtenemos la k-n+1 columna de $\underline{\underline{U}}_{12}$

Trasponiendo la igualdad (0.43), tenemos que

$$\underbrace{\left[\underline{\underline{U}}_{11}\right]^t}_{[n-1]\times[n-1]} \cdot \underbrace{\left[\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)}\right]^t}_{[n-1]\times[k-n+1]} = \underbrace{\left[\underline{\underline{A}}_{21}{}^{(i)}\right]^t}_{[n-1]\times[k-n+1]} \qquad (0.45)$$

La cual define $k-n+1$ sistemas triangulares inferiores independientes entre si de $n-1$ incógnitas cada uno; estos sistemas los volvemos a resolver en cada iteración ya que la matriz $\underline{\underline{A}}_{21}{}^{(i)}$ cambia en cada iteración. Esto se puede ver en el siguiente esquema

Primer sistema	$\underbrace{\left[\underline{\underline{U}}_{11}\right]^t}_{[n-1]\times[n-1]} \cdot \underbrace{\left[\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)}\right]^t_{(:,1)}}_{[n-1]\times[1]} = \underbrace{\left[\underline{\underline{A}}_{21}{}^{(i)}\right]^t_{(:,1)}}_{[n-1]\times[1]}$	Obtenemos la primer columna de $\left[\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)}\right]^t$
Segundo sistema	$\underbrace{\left[\underline{\underline{U}}_{11}\right]^t}_{[n-1]\times[n-1]} \cdot \underbrace{\left[\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)}\right]^t_{(:,2)}}_{[n-1]\times[1]} = \underbrace{\left[\underline{\underline{A}}_{21}{}^{(i)}\right]^t_{(:,2)}}_{[n-1]\times[1]}$	Obtenemos la segunda columna de $\left[\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)}\right]^t$
………………..	………………….	………………….
k-n+1 sistema	$\underbrace{\left[\underline{\underline{U}}_{11}\right]^t}_{[n-1]\times[n-1]} \cdot \underbrace{\left[\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)}\right]^t_{(:,k-n+1)}}_{[n-1]\times[1]} = \underbrace{\left[\underline{\underline{A}}_{21}{}^{(i)}\right]^t_{(:,k-n+1)}}_{[n-1]\times[1]}$	Obtenemos la k-n+1 columna de $\left[\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)}\right]^t$

Una vez calculadas las matrices $\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)}$ y $\underline{\underline{U}}_{12}$, podemos calcular la matriz complemento de Shur $\tilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{A}}_{22}{}^{(i)} - \underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)} \cdot \underline{\underline{U}}_{12}$ para luego factorizarla de la forma $\tilde{\underline{\underline{A}}}^{(i)} = \underline{\underline{L}}_{22}{}^{(i)} \cdot \underline{\underline{U}}_{22}{}^{(i)}$.

Teniendo todos los bloques calculados, vemos que el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\underline{\underline{L}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{[n-1]\times[k-n+1]} \\ \hline \underbrace{\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{L}}_{22}{}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\underline{\underline{U}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{U}}_{12}}_{[n-1]\times[k-n+1]} \\ \hline \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{[k-n+1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{U}}_{22}{}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \underbrace{\underline{\Delta q_a}}_{[n-1]\times 1} \\ \hline \underbrace{\underline{\Delta q_b}}_{[k-n+1]\times 1} \end{array}\right\}^{(i)} = -\left\{\begin{array}{c} \underbrace{\underline{f}^c}_{[n-1]\times 1} \\ \hline \underbrace{\underline{f}^e}_{[k-n+1]\times 1} \end{array}\right\}^{(i)} \qquad (0.46)$$

Puede ser expresado por dos sistemas de ecuaciones acopladas, que presentan mayor sencillez en su resolución.

- ✓ Sistema 1:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\underline{\underline{L}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{[n-1]\times[k-n+1]} \\ \hline \underbrace{\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{L}}_{22}{}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \end{array}\right] \cdot \left\{\begin{array}{c} \underbrace{\underline{w}_a}_{[n-1]\times 1} \\ \hline \underbrace{\underline{w}_b}_{[k-n+1]\times 1} \end{array}\right\}^{(i)} = -\left\{\begin{array}{c} \underbrace{\underline{f}^{c}}_{[n-1]\times 1} \\ \hline \underbrace{\underline{f}^{e}}_{[k-n+1]\times 1} \end{array}\right\}^{(\hat{i})}$$

$$\underline{\underline{L}}_{11} \cdot \underline{w}_a = -\underline{f}^{c} \quad \rightarrow \quad \underline{w}_a = -\left[\underline{\underline{L}}_{11}\right]^{-1} \cdot \underline{f}^{c} \tag{0.47}$$

$$\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)} \cdot \underline{w}_a + \underline{\underline{L}}_{22}{}^{(i)} \cdot \underline{w}_b = -\underline{f}^{e} \quad \rightarrow \quad \underline{w}_b = -\left[\underline{\underline{L}}_{22}{}^{(i)}\right]^{-1} \left[\underline{f}^{e} - \underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)} \cdot \underline{w}_a\right]$$

- ✓ Sistema 2

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\underline{\underline{U}}_{11}}_{[n-1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{U}}_{12}}_{[n-1]\times[k-n+1]} \\ \hline \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{[k-n+1]\times[n-1]} & \underbrace{\underline{\underline{U}}_{22}{}^{(i)}}_{[k-n+1]\times[k-n+1]} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \underbrace{\underline{\Delta q}_a}_{[n-1]\times 1} \\ \hline \underbrace{\underline{\Delta q}_b}_{[k-n+1]\times 1} \end{array}\right\}^{(i)} = -\left\{\begin{array}{c} \underbrace{\underline{w}_a}_{[n-1]\times 1} \\ \hline \underbrace{\underline{w}_b}_{[k-n+1]\times 1} \end{array}\right\}^{(\hat{i})}$$

$$\underline{\underline{U}}_{22}{}^{(i)} \cdot \underline{\Delta q}_b = -\underline{w}_b \quad \rightarrow \quad \underline{\Delta q}_b = -\left[\underline{\underline{U}}_{22}{}^{(i)}\right]^{-1} \cdot \underline{w}_b$$

$$\underline{\underline{U}}_{11} \cdot \underline{\Delta q}_a + \underline{\underline{U}}_{12} \cdot \underline{\Delta q}_b = -\underline{w}_a \quad \rightarrow \quad \underline{\Delta q}_a = -\left[\underline{\underline{U}}_{11}\right]^{-1} \cdot \left[\underline{w}_a + \underline{\underline{U}}_{12} \cdot \underline{\Delta q}_b\right]$$

Conclusión y futuro seguir

1) Conclusión

Para poder abordar sobre la conveniencia de hacer una descomposición en bloques, vamos primeramente analizar la cantidad de operaciones vinculadas a una formulación clásica y a una en bloques, para luego compararlas.

Analizando las ecuaciones linealizadas (0.21), vemos que se trata de un sistema lineal de $\left[k \times k\right]$ en donde calculando por medio de una formulación clásica tenemos para:

Primer iteración

- ✓ k^2 coeficientes de la matriz $\underline{\underline{A}}^{(i)}$
- ✓ k términos del vector independiente $\underline{b}^{(i)}$
- ✓ y del orden de $k^3/3$ operaciones para resolver el sistema por una eliminación gaussiana

En las restantes j-esimas iteraciones

- ✓ $\left(k-n+1\right)\times k$ elementos de la matriz de los coeficientes $\underline{\underline{A}}^{(i)}$
- ✓ $\left(k-n+1\right)$ elementos en el vector de los términos independientes
- ✓ y del orden de $k^3/3$ operaciones para resolver el sistema por una eliminación gaussiana

Es decir un número total de operaciones en j iteraciones es

$$\frac{k^3}{3}+k^2+k+\left[\left(k-n+1\right)\left(k+1\right)+\frac{k^3}{3}\right]\left[j-1\right] \tag{0.48}$$

Si en cambio usáramos una formulación en bloques como la descripta anteriormente, el número de operaciones seria:

Primer iteración

1.Calcular los bloques $\underline{\underline{A}}_{11}, \underline{\underline{A}}_{12}, \underline{\underline{A}}_{21}{}^{(i)}, \underline{\underline{A}}_{22}{}^{(i)}, \underline{f}^{c}$ y $\underline{f}^{e\,(i)}$ tenemos que realizar k^2+k operaciones.

2.Factorizamos la matriz $\underline{\underline{A}}_{11}$,para lo cual hacemos $\left(n-1\right)^3/3$ operaciones

3.Definimos el bloque $\underline{\underline{U}}_{12}$ para lo cual hacemos $\left(n-1\right)^2\left(k-n+1\right)$ operaciones al resolver $\left(k-n+1\right)$ sistemas triangulares inferiores e independientes de $\left(n-1\right)$ incógnitas.

4.Para definir el $\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)}$, también hacemos $\left(n-1\right)^2\left(k-n+1\right)$ operaciones al resolver $\left(k-n+1\right)$ sistemas triangulares inferiores e independientes de $\left(n-1\right)$ incógnitas.

5.Calculamos la matriz complemento de Shur y la factorizamos, para lo cual requerimos $\left(k-n+1\right)^3/3$.

6.Resolvemos el sistema 1 que esta definido por dos sistemas triangulares inferiores acoplados

$$\underline{\underline{L}}_{11}\cdot\underline{w}_a=-\underline{f}^{c}$$

$$\underline{\underline{L}}_{21}{}^{(i)}\cdot\underline{w}_a+\underline{\underline{L}}_{22}{}^{(i)}\cdot\underline{w}_b=-\underline{f}^{e}$$

Para lo cual requerimos $\left(n-1\right)^2$ y $\left(k-n+1\right)^2$ operaciones respectivamente.

7.Resolvemos el sistema 2 que esta definido por dos sistemas triangulares superiores acoplados.

$$\underline{\underline{U}}_{22}{}^{(i)}\cdot\underline{\Delta q_b}=-\underline{w}_b$$

$$\underline{\underline{U}}_{11}\cdot\underline{\Delta q_a}=-\left[\underline{w}_a+\underline{\underline{U}}_{12}\cdot\underline{\Delta q_b}\right]$$

Para lo cual requerimos $\left(k-n+1\right)^2\left(n-1\right)^2$ y $\left(n-1\right)^2$ operaciones respectivamente.

Para las restantes j-esimas iteraciones tenemos

8.Actualizar los bloques $\underline{\underline{A_{21}}}^{(i)}, \underline{\underline{A_{22}}}^{(i)}$ y $\underline{f}^{e(i)}$ tenemos que realizar $(k-n+1)(k+1)$ operaciones.
9.Ídem al punto 4 anterior.
10. Ídem al punto 5 anterior.
11. Resolvemos del sistema 1 únicamente el segundo sistema triangular inferior
$$\underline{\underline{L_{21}}}^{(i)} \cdot \underline{w_a} + \underline{\underline{L_{22}}}^{(i)} \cdot \underline{w_b} = -\underline{f}^{e}$$
Para lo cual requerimos $(k-n+1)^2$ operaciones.
12. Ídem al punto 7 anterior.

Por lo tanto el número total de operaciones es

$$\frac{(n-1)^3}{3} + [k-n+1]\left[2(n-1)^2 + k(j-1) + (n-1)(j-1)\right] + \ldots$$
$$\frac{(k-n+1)^3}{3} j + (n-1)^2 (j+1) + \ldots$$
$$2(k-n+1)^2 j \tag{0.49}$$

De las formulas (0.48) y (0.49) podemos calcular las siguientes tablas

Cantidad de nodos N	Cantidad de tramos k	Iteraciones j	Formulacion Clasica
20	30	1	9930
20	30	10	93999
20	30	20	187409
40	60	1	75660
40	60	10	735189
40	60	20	1467999
80	120	1	590520
80	120	10	5819169
80	120	20	11628779
80	120	30	17438389

Tabla 1 – Eficiencia en la formulación clásica

Cantidad de nodos n	Cantidad de tramos k	Iteraciones j	Formulacion en bloques	Porcetaje de operaciones en bloque VS clasica
20	30	1	11636	
20	30	10	21914	23,3
20	30	20	33334	17,8
40	60	1	90666	
40	60	10	131004	17,8
40	60	20	175824	12,0
80	120	1	714926	
80	120	10	874784	15,0
80	120	20	1052404	9,0
80	120	30	1230024	7,1

Tabla 2 – Eficiencia en la formulación en bloques

En la tabla 1 y 2 vemos el número de operaciones que se realiza para diferente cantidad de nodos, tramos e iteraciones
Como se puede ver en la tabla 2 la eficiencia de la metodología en bloques es mucho mejor para problemas con mayor numero de tramos, es decir incognitas, y nodos, y a la vez cada vez es mas grande cuando el numero de iteraciones aumenta.

2) Futuro seguir

En el futuro estaríamos implementando un código en paralelo para las etapas de resolución del los sistemas triangulares en cada uno de los puntos 3) 4) y 9), ya que se trata de sistemas triangulares desacoplados y de igual dimensión, con esto buscamos aumentar la eficiencia computacional del algoritmo. En esta etapa vamos a comparar el condicionamiento de los sistemas parciales resueltos con el condicionamiento del sistema correspondiente a la formulación clásica.

Agradecimientos
A la Universidad Tecnológica Nacional, a los Dptos. de Ing. Mecánica, Ing. Civil y Sistemas de la Regional La Plata en los cuales los autores desarrollamos nuestras tareas de investigación y docencia.

Referencias
[1] Numerical Algorithms with Fortran. Gisela Engeln – Mullges; Frank Uhlig. Alemania: Springer, 1996.
[2] Análisis Numérico. 6a. ed. Richard L. Burden; J. Douglas Faires. México: Thompson, 1998.
[3] Métodos Numéricos con MatLab. John H. Mathews y Kurtis D. Fink. Prentice Hall
[4] Algoritmos Numéricos. Jacobo Gordon. Argentina: UNLP, 1985.
[5] Matrix Computations. Gene H. Golub – Charles F. Van Loan. Tercer Edición. Johns Hopkins University Press.